OHIKO DEIALDIKO AZTERKETA (partzial 1 eta 2)

1.- Kalkulatu $\lim_{n\to\infty}\left(\lambda+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2+2}{3n}} \quad \forall\lambda>0$

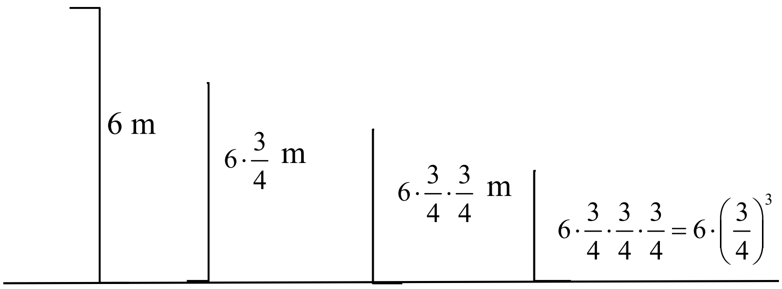
(Puntu 1)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lambda+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2+2}{3n}}=\lambda^{\infty}=\begin{cases}\infty & \forall\lambda>1\\ 0 & \forall\lambda<1\\ 1^{\infty}=A \quad \lambda=1 \Rightarrow \mathrm{L}A=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{3n}\cdot\mathrm{L}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{3} & \Leftrightarrow A=e^{1/3}\end{cases}$$

2.- Pilota bat 6 metroko altueratik erortzen uzten da, eta, botatzen hasten da. Aldi bakoitzean, aurreko botearen hiru laurdeneko altuera errebotatzen du.

Kalkulatu, guztira, pilotak egiten duen <u>distantzia bertikala</u>, etengabeki bota egiten duenean.

(Puntu 1)



Eta, horrela, infinitu aldiz. Beraz, pilotak egindako distantzia bertikal osoa $r=\frac{3}{4}$ arrazoiko serie geometrikoaren batura da:

$$\sum_{n=0}^{\infty}6\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n=\frac{6}{1-\frac{3}{4}}=24\ m$$

3.- Aztertu $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot 2^{na^2}$ seriearen izaera $\forall a \in \mathbb{R}$.

(Puntu 1)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non $a_n = n^2 \cdot 2^{na^2} > 0 \quad \forall n \quad \Rightarrow$ D´Alembert-en irizpidea aplikatuko diogu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 2^{(n+1)a^2}}{n^2 \cdot 2^{na^2}} = 2^{a^2} \begin{cases} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 < 0 \ \# \\ > 1 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ dibergentea da} \\ = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \text{ dibergentea da} \end{cases}$$

Beraz, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dibergentea da $\forall a \in \mathbb{R}$

OHARRA: B.B. erabiliz hasiko bagina,

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^2 \cdot 2^{na^2} = \infty \neq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ezin da konbergentea izan.

Eta, $a_n > 0 \quad \forall n$ denez, orduan dibergentea da.

4.- a) Aurkitu $f(x)=\arctan x$ funtzioaren berretura-seriezko garapena, non balio duen adieraziz.

b) Zein da $f^{11)}(0)$-ren balioa?

c) Zenbat batugai batu beharko genituzke aurreko garapenean, $f(1)$-en gutxi gorabeheherako balioa lortzeko, 0.01 baino gutxiagoko errorearekin?

(3 puntu)

a) $f(x)=\arctan x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\cdot x^{2n} \quad \forall x\in(-1,1)$

(*) $r=-x^2$ arrazoiko serie geometrikoaren batura da, konbergentea $\Leftrightarrow |r|=x^2<1$

Eta, emaitza hori integratuz:

$$f(x)=\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \forall x\in(-1,1) \qquad \left(f(0)=\arctan 0=0\right)$$

Tarte horretako muga aztertuz:

$$x=1 \text{ puntuan: } \begin{cases} \exists f \text{ jarraitua} \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{2n+1} \text{ konbergentea da (Leibniz-en teorema egiaztatzen baitu)} \Rightarrow \\ \text{batura finitua du} \Rightarrow \text{Berretura-seriezko garapenak batura jarraitua du} \end{cases}$$

$$x=-1 \text{ puntuan: } \begin{cases} \exists f \text{ jarraitua} \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{2n+1} \text{ konbergentea da (Leibniz-en teorema egiaztatzen baitu)} \Rightarrow \\ \text{batura finitua du} \Rightarrow \text{Berretura-seriezko garapenak batura jarraitua du} \end{cases}$$

Beraz, $f(x)=\arctan x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \forall x\in\left[-1,1\right]$

b) Aurreko garapena *f* funtzioaren Taylor-en seriea da, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n)}(0)}{n!}\cdot x^n$, hain zuzen ere.

Orduan,

$$2n+1=11 \quad \Leftrightarrow \quad n=5 \quad \Rightarrow \quad \left(-1\right)^5\cdot\frac{x^{11}}{11}=\frac{f^{11)}(0)}{11!}\cdot x^{11} \quad \Leftrightarrow \quad f^{11)}(0)=-\frac{11!}{11}=-10!$$

c) $f(1)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{2n+1}$, lehen esan dugunez, Leibniz-en teorema egiaztatzen duen serie alternatua, beraz batura finitua du $\left(S=f(1)=\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}\right)$, eta, gainera, $\left|S-S_n\right|<\left|a_{n+1}\right|$

Orduan: $\left|S-S_n\right|<\left|a_{n+1}\right|=\dfrac{1}{2n+3}\overset{n?}{\leq}\dfrac{1}{100}\Leftrightarrow 2n+3\geq 100\Leftrightarrow n\geq 48.5\Rightarrow n=49$

Batukaria $n=0$ tik hasten denez, 50 batugai hartu beharko ditugu.

5.- $f(x,y)=\begin{cases} y+\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\cdot\tan\left(\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right) & \forall(x,y)\neq(0,0)0 \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **funtzioa emanik, jatorrian jarraitua dela jakinda, aztertu bere diferentziagarritasuna puntu horretan.**

(2 puntu)

Deribatu partzialak kalkulatzen hasiko gara:

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{k-0}{k}=1$$

Eta, diferentziagarria izateko B.B.N. erabiliz:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{k+\dfrac{h^2k}{h^2+k^2}\tan\left(\dfrac{h^3+k^3}{h^2+k^2}\right)-k}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\dfrac{h^2k}{h^2+k^2}\tan\left(\dfrac{h^3+k^3}{h^2+k^2}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

$$=\lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \forall\theta}}\frac{\rho\cos^2\theta\sin\theta\cdot\tan\left(\rho\left(\cos^3\theta+\sin^3\theta\right)\right)}{\rho}=\lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \forall\theta}}\cos^2\theta\sin\theta\cdot\tan\left(\rho\left(\cos^3\theta+\sin^3\theta\right)\right)=0$$

Beraz, *f* diferentziagarria da (0,0) puntuan.

6.- $F(x,y,z)=g\left(yz^2\right)+g(z)+x^2+y^2-2$ **funtzioa eta** $P(x,y,z)=(0,0,0)$ **puntua emanik, non *g* eta bere deribatuak funtzio jarraituak diren,**

a) **Aztertu zeintzuk diren *g* funtzioak bete behar dituen baldintzak** $F(x,y,z)=0$ **ekuazioak** $z=z(x,y)$ **funtzio inplizitua defini dezan *P* puntuaren ingurunean.**

b) **Aurreko ataleko baldintzak betetzen direla suposatuz, aztertu ea** $z=z(x,y)$ **funtzioak puntu kritikoa duen (0,0) puntuan, eta, baiezko kasuan, sailkatu.**

(3 puntu)

a) Funtzio inplizituaren teorema erabiliz:

i. $F(P)=g(0)+g(0)-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad g(0)=1$

ii. F-ren deribatu partzialak existitzen eta jarraituak dira $P(x,y,z)=(0,0,0)$ puntuaren ingurunean:

$$F'_x=2x \quad F'_y=z^2\cdot g'\left(yz^2\right)+2y \quad F'_z=2yz\cdot g'\left(yz^2\right)+g'(z).$$

iii. $F'_z(P)\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad g'(0)\neq 0$

Beraz, $g(0)=1$ eta $g'(0)\neq 0$ baldintzak betetzen badira, $P(x,y,z)=(0,0,0)$ puntuaren ingurunean $\exists ! z=z(x,y)$ diferentziagarria, $z(0,0)=0$ izanik.

b) $F(x,y,z)=g\left(yz^2\right)+g(z)+x^2+y^2-2$ ekuazioan x-rekiko eta y-rekiko deribatuz:

$$(1)\begin{cases} 2x+\left(2yz\cdot g'\left(yz^2\right)+g'(z)\right)\cdot z'_x=0 \quad \Rightarrow \quad z'_x(0,0)=0 \\ z^2\cdot g'\left(yz^2\right)+2y+\left(2yz\cdot g'\left(yz^2\right)+g'(z)\right)\cdot z'_y=0 \quad \Rightarrow \quad z'_y(0,0)=0 \end{cases}$$

Beraz, $z=z(x,y)$ funtzioak puntu kritikoa du (0,0) puntuan.

Sailkatzeko, bigarren mailako deribatu partzialak behar ditugu.

(1) sistemaren lehenengo ekuazioan x-rekiko deribatuz:

$$2+\left(2yz\cdot g'\left(yz^2\right)+g'(z)\right)'_x\cdot z'_x+\left(2yz\cdot g'\left(yz^2\right)+g'(z)\right)\cdot z''_{x^2}=0 \quad \Rightarrow \quad z''_{x^2}(0,0)=-\frac{2}{g'(0)}$$

Eta y-rekiko:

$$\left(2yz\cdot g'\left(yz^2\right)+g'(z)\right)'_y\cdot z'_x+\left(2yz\cdot g'\left(yz^2\right)+g'(z)\right)\cdot z''_{xy}=0 \quad \Rightarrow \quad z''_{xy}(0,0)=0$$

Eta, bigarren ekuazioan y-rekiko deribatuz:

$$2zz'_y\cdot g'\left(yz^2\right)+z^2\cdot\left(z^2+2yzz'_y\right)\cdot g'\left(yz^2\right)+2+\left(2yz\cdot g'\left(yz^2\right)+g'(z)\right)'_y\cdot z'_y+$$
$$+\left(2yz\cdot g'\left(yz^2\right)+g'(z)\right)\cdot z''_{y^2}=0 \quad \Rightarrow \quad z''_{y^2}(0,0)=-\frac{2}{g'(0)}$$

Beraz,

$$d^2z(0,0)=-\frac{2}{g'(0)}\cdot\left((dx)^2+(dy)^2\right)\begin{cases} >0 \quad \Leftrightarrow \quad g'(0)<0 \quad \Rightarrow \quad (0,0)\text{ maximoa da.} \\ <0 \quad \Leftrightarrow \quad g'(0)>0 \quad \Rightarrow \quad (0,0)\text{ minimoa da.} \end{cases}$$

7.- Kalkulatu analitikoki eta grafikoki $f(x,y)=\dfrac{\mathrm{L}\left(x^2+y^2\right)+\left(xy\right)^{-1/2}}{\arccos(x+y)}$ **funtzioaren definizio-eremua.**

(1.5 puntu)

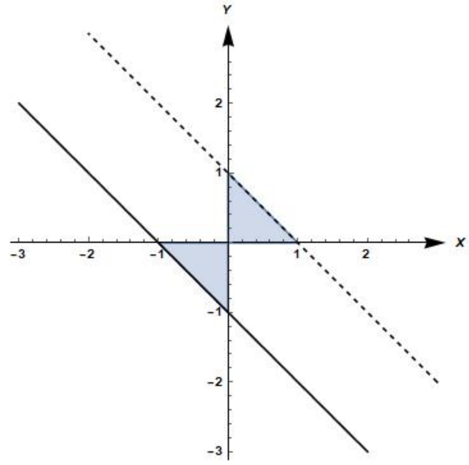
$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2>0,\ xy>0,\ -1\le x+y\le 1,\ \arccos(x+y)\ne 0\right\}$$

$x^2+y^2>0 \quad \Leftrightarrow \quad (x,y)\ne(0,0)$

$xy>0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x>0 \text{ eta } y>0 \\ x<0 \text{ eta } y<0 \end{cases}$

$-1\le x+y\le 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1-x\le y\le 1-x$

$\arccos(x+y)\ne 0 \quad \Leftrightarrow \quad x+y\ne 1 \quad \Leftrightarrow \quad y\ne 1-x$



8.- Metalezko plaka bateko puntu bakoitzeko tenperatura $f(x,y)=e^x\cos y+e^y\cos x$ **funtzioak ematen du.**

a) Adierazi zein noranzkotan ematen den tenperaturaren hazkunderik azkarrena P(0,0) puntutik abiatuz. Zein da tenperaturaren aldakuntzaren abiadura norabide horretan?

b) Adierazi zein noranzkotan ematen den tenperaturaren jaitsierarik azkarrena P(0,0) puntutik abiatuz.

(1.5 puntu)

a) Tenperaturaren hazkunderik azkarrena funtzioaren gradientearen noranzkoan ematen da:

$$\left.\begin{array}{l} f'_x(x,y)=e^x\cos y-e^y\sin x \\ f'_y(x,y)=-e^x\sin y+e^y\cos x \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{cases} f'_x(x,y)=1 \\ f'_y(x,y)=1 \end{cases} \Rightarrow \quad \overrightarrow{\nabla f}(0,0)=(1,1)$$

Eta, tenperaturaren aldakuntzaren abiadura norabide horretan bektore horren modulua da: $\left|\overrightarrow{\nabla f}(0,0)\right|=\sqrt{2}$

b) Tenperaturaren jaitsierarik azkarrena gradientearen kontrako noranzkoan ematen da, (-1,-1) hain zuzen ere.

OHIKO DEIALDIKO AZTERKETA (partzial 3)

1.- Izan bedi $V \equiv \begin{cases} z \le 2 \\ x^2 + y^2 \ge 2 - z \\ z \ge \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$ **espazioko solidoa.**

a) **Kalkulatu *V*-ren bolumena.**

b) **Kalkulatu *V* mugatzen duen** $x^2 + y^2 = 2 - z$ **gainazalaren zatiaren azalera.**

c) **Kalkulatu *V* mugatzen duen** $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ **gainazalaren zatitik irteten den** $\vec{F}(x,y,z) = (xz,\ yz, 1)$ **bektorearen fluxua.**

(3 puntu)

a) $Bol(V) = \iiint\limits_V dxdydz$

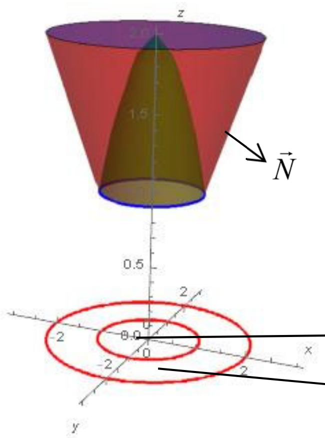
Konoaren eta paraboloidearen arteko ebakidura:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 - z \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \Rightarrow \ z^2 = 2 - z \ \Leftrightarrow \ z^2 + z - 2 = 0 \ \Rightarrow \ z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \overset{(z>0)}{=} 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C_1 \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Eta, konoaren eta $z = 2$ planoaren artekoa: $C_2 \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 2 \end{cases}$

Eta bi kurba hauen proiekzioa XY planoan: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ eta $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$



Zilindrikoetan:

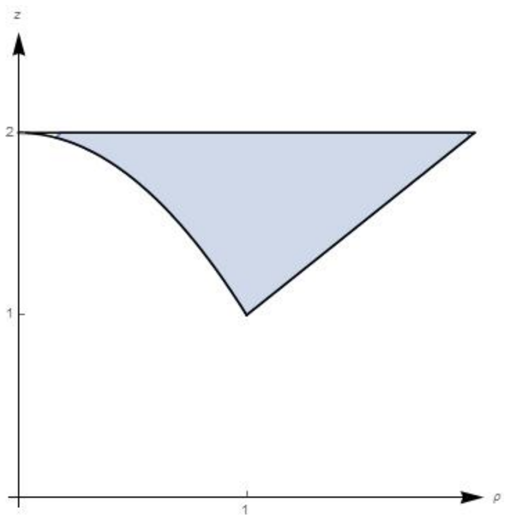
$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad |J| = \rho \quad \Rightarrow \quad V \equiv \begin{cases} z \le 2 \\ \rho^2 \ge 2 - \\ z \ge \rho \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad 0 \le \theta \le 2\pi$

$x^2 + y^2 \le 1 \Leftrightarrow \rho \le 1$

$1 \le x^2 + y^2 \le 4 \Leftrightarrow 1 \le \rho \le 2$

Solidoa $\theta = \theta_0$ planoaren bitartez ebakitzean, hau da, ρz planoan proiektatuta:



Bi aukera daude:

$$\begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ 2-\rho^2 \le z \le 2 \end{cases} \text{ eta } \begin{cases} 1 \le \rho \le 2 \\ \rho \le z \le 2 \end{cases}$$

Edo:

$$\begin{cases} 1 \le z \le 2 \\ \sqrt{2-z} \le \rho \le z \end{cases}$$

Beraz, bigarren aukera hobea da:

$$\Rightarrow \quad V \equiv \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 1 \le z \le 2 \\ \sqrt{2-z} \le \rho \le z \end{cases}$$

Orduan,

$$Bol(V) = \int_0^{2\pi}\int_1^2\int_{\sqrt{2-z}}^{z} \rho \, d\rho \, dz \, d\theta = 2\pi \int_1^2 \frac{z^2-(2-z)}{2} dz = \pi \left[\frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{2} - 2z \right]_1^2 = \frac{11\pi}{6}$$

b) $Azalera(S) = \iint_S dS = \iint_{R_{xy}} \left|\vec{N}\right| dxdy$

non $S \equiv z = 2 - x^2 - y^2 \quad \forall (x,y) \in R_{xy} \equiv x^2 + y^2 \le 1$

eta $\vec{N} \equiv (2x, 2y, 1) \Rightarrow \left|\vec{N}\right| = \sqrt{1 + 4\left(x^2+y^2\right)}$

Polarretan: $\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta \end{cases} \quad |J| = \rho \quad \Rightarrow \quad S \equiv \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le 1 \end{cases}$

Orduan: $Azalera(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho\sqrt{1+4\rho^2}\, d\rho \, d\theta = 2\pi \left. \frac{\left(1+4\rho^2\right)^{3/2}}{3/2} \cdot \frac{1}{8} \right|_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$

c) $Fluxua\left(\vec{F}\right) = \iint_S \vec{F} dS = \pm \iint_{R_{xy}} \left(\vec{F} \cdot \vec{N}\right) dxdy$

non $S \equiv z = \sqrt{x^2+y^2} \quad \forall (x,y) \in R_{xy} \equiv 1 \le x^2 + y^2 \le 4$

eta $\vec{N} \equiv \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 \right) \quad \Rightarrow \quad \vec{F} \cdot \vec{N} = -x^2 - y^2 + 1$

Polarretan: $\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta \end{cases} \quad |J| = \rho \quad \Rightarrow \quad S \equiv \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 1 \le \rho \le 2 \end{cases}$

Orduan: $Fluxua\left(\vec{F}\right) = \pm \int_0^{2\pi}\int_1^2 \rho\left(1-\rho^2\right) d\rho \, d\theta \overset{\left(\gamma > \frac{\pi}{2}\right)}{=} -2\pi \left. \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right) \right|_1^2 = \frac{9\pi}{2}$

2.- Kalkulatu $z=0$ eta $z=3$ planoen artean mugaturiko $x^2+y^2=1$ zilindroaren zatitik irteten den $\vec{F}(x,y,z)=xz\vec{i}-y^2\vec{j}+xz\vec{k}$ bektorearen fluxua.

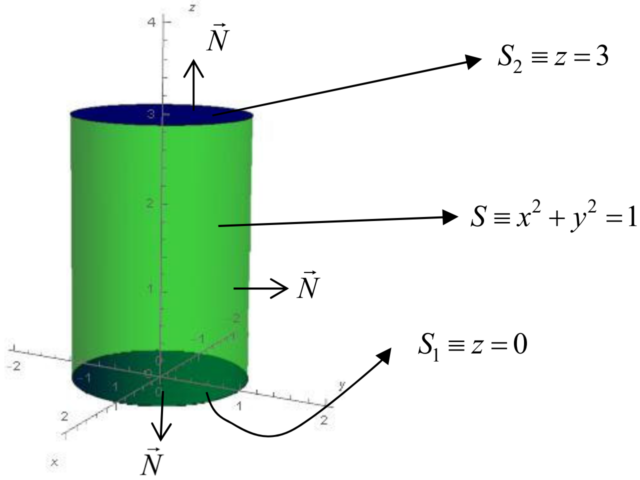
(2 puntu)

$$Fluxua\left(\vec{F}\right)=\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint_S \left(xzdydz-y^2dzdx+xzdxdy\right)$$

non $S\equiv x^2+y^2=1$, $0\le z\le 3$ izanik.

S gainazala ezin da $z=z(x,y)$ funtzioaren bitartez adierazi beraz, $y=y(x,z)$ bakandu beharko genuke, XZ planoan proiektatuz, edo YZ planoan proiektatu, $x=x(y,z)$ erara adieraziz. Kasu batean zein bestean, bi funtzio definitu beharko genituzke (balio positibo eta balio negatiboetarako). Hori dela eta, beste modu batean egingo dugu.

Izan bitez $S_1\equiv z=0$ eta $S_2\equiv z=3$, biak definituta $\forall(x,y)\in R_{xy}\equiv x^2+y^2\le 1$. Eta, defini dezagun $S'=S\cup S_1\cup S_2$ gainazal itxia eta zatika leuna.



$$\iint_{S'}\vec{F}\cdot d\vec{S}=\iint_S\vec{F}\cdot d\vec{S}+\iint_{S_1}\vec{F}\cdot d\vec{S}+\iint_{S_2}\vec{F}\cdot d\vec{S}\overset{\text{(GAUSS)}}{=}\iiint_V div\left(\vec{F}\right)dxdydz=\iiint_V(z-2y+x)dxdydz\overset{(*)}{=}$$

$$=\iiint_V z\,dxdydz$$

(*) $V\equiv\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\0\le z\le 3\end{cases}$ solidoa simetrikoa da $y=0$ eta $x=0$ planoekiko, eta, y eta x funtzio bakoitiak dira, orduan, $\iiint_V 2y\,dxdydz=0$ eta $\iiint_V x\,dxdydz=0$

Zilindrikoetan: $\begin{cases}x=\rho\cdot\cos\theta\\y=\rho\cdot\sin\theta\\z=z\end{cases}\quad |J|=\rho\quad\Rightarrow\quad V\equiv\begin{cases}0\le\theta\le\pi\\0\le\rho\le 1\\0\le z\le 3\end{cases}$

$$\iint_{S'}\vec{F}\cdot d\vec{S}=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^3\rho z\,dz\,d\rho\,d\theta=2\pi\int_0^1\frac{9}{2}\rho\,d\rho=\frac{9\pi}{2}$$

Orain, $S_1 \equiv z=0$ eta $S_2 \equiv z=3$ planoetatik irteten diren fluxuak kalkulatu behar ditugu:

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \pm \iint_{R_{xy}} \left(\vec{F} \cdot \vec{N} \right) dxdy \overset{(1)}{=} -\iint_{R_{xy}} 0 dxdy = 0$$

(1) $S_1 \equiv z=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(x,y,z) = (0,-y^2,0)$, $\vec{N} = (0,0,1)$, $\gamma > \dfrac{\pi}{2}$

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \pm \iint_{R_{xy}} \left(\vec{F} \cdot \vec{N} \right) dxdy \overset{(2)}{=} \iint_{R_{xy}} 3x \, dxdy \overset{(3)}{=} 0$$

(2) $S_1 \equiv z=3 \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(x,y,z) = (3x,-y^2,3x)$, $\vec{N} = (0,0,1)$, $\gamma < \dfrac{\pi}{2}$

(3) $R_{xy} \equiv x^2+y^2 \le 1$ eskualde simetrikoa da $x=0$ zuzenarekiko, eta, x funtzio bakoitia da.

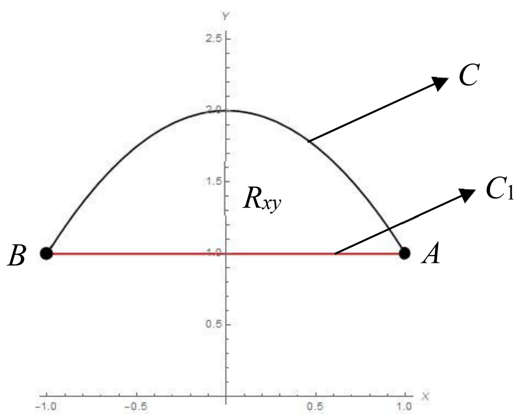
Orduan, $\displaystyle\iint_{S} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S'} \vec{F} \cdot d\vec{S} - \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} - \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{9\pi}{2}$

3.- $A(1,1)$ eta $B(-1,1)$ puntuen artean mugaturiko $C \equiv y = 2 - x^2$ kurbaren zatia, eta $\vec{F}(x,y) = \left(2xe^{x^2+2y^2} - y,\ 4ye^{x^2+2y^2} + x^2 + \sqrt{y^4 + y}\right)$ eremu bektoriala emanik, kalkulatu $I = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

(2 puntu)

$$I = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \left(\left(2xe^{x^2+2y^2} - y\right)dx + \left(4ye^{x^2+2y^2} + x^2 + \sqrt{y^4 + y}\right)dy\right)$$

Har dezagun $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y > 0\right\}$ eremu sinpleki konexua, $A, B \in D$, non $\vec{F}$, eta, bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak diren. Izan bedi $C_1 \equiv y = 1,\ -1 \le x \le 1$, $C_1 \subset D$, eta defini dezagun $C' = C \bigcup C_1$ kurba itxia, R eskualdea mugatzen duena, $C', R \subset D$.



Green-en teorema erabiliz:

$$\oint_{C'} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{R_{xy}} \left(Y'_x - X'_y\right) dxdy =$$

non $\begin{cases} X = 2xe^{x^2+2y^2} - y & \Rightarrow \quad X'_y = 8xye^{x^2+2y^2} - 1 \\ Y = 4ye^{x^2+2y^2} + x^2 + \sqrt{y^4 + y} & \Rightarrow \quad Y'_x = 8xye^{x^2+2y^2} + 2x \end{cases}$ eta $R_{xy} \equiv \begin{cases} - \le x \le 1 \\ 1 \le y \le 1 - x^2 \end{cases}$

$$= \iint_{R_{xy}} (2x+1)\,dxdy = \int_{-1}^{1} \int_{1}^{2-x^2} (2x+1)\,dy\,dx = \int_{-1}^{1} (1-x^2)(2x+1)\,dx = \int_{-1}^{1} (-2x^3 - x^2 + 2x + 1)\,dx =$$

$$= \left(-\frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} + x^2 + x\right)_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$$

Eta orain, $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^{1} \left(2xe^{x^2+2} - 1\right) dx = \left(e^{x^2+2} - x\right)\Big|_{-1}^{1} = -2$

Beraz, $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C'} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{4}{3} + 2 = \frac{10}{3}$

4.- Lortu $\int_C \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$ integralaren balioa hurrengo bi kasuetan:

a) $C \equiv (x-1)^2+(y-1)^2=1$.

b) $C \equiv \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

Aurreko emaitzen arabera, zer esan dezakegu integralaren bidearekiko independentziari buruz?

(Puntu 1)

$\int_C \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, non $\vec{F}=X\cdot\vec{i}+Y\cdot\vec{j}=\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\vec{i}+\frac{y}{x^2+y^2}\cdot\vec{j}$, eta, bere lehenengo deribatu partzialak jarraituak diren $D=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ eremu bikoizki konexuan ((0,0) puntu singular bakarra da). Eta $X'_y=Y'_x=\frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$. Orduan, $\forall C\subset D$, kurba sinplea, itxia eta leuna edo zatika leuna, hurrengo bi emaitzetako bat ematen da:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\begin{cases}0 & C \text{ kurbak inguratzen ez badu puntu singularra}\\ k & C \text{ kurbak inguratzen badu puntu singularra}\end{cases}$$

Horren arabera:

a) $\int_C \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=0$, $C\equiv(x-1)^2+(y-1)^2=1$ kurbak ez baitu (0,0) puntua inguratzen.

b) Eta, $C\equiv\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ kurbak (0,0) puntua inguratzen duenez, puntu hori inguratzen duen edozein beste kurba itxi eta sinple har dezakegu integral hori kalkulatzeko.

Izan bedi $C'\equiv x^2+y^2=1 \quad\Rightarrow\quad \int_C \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\int_{C'} \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\int_{C'}\left(xdx+ydy\right)=0$

Aurreko bi emaitzen arabera, frogatu dugu $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=0 \quad \forall C\subset D$, kurba sinplea, itxia eta leuna edo zatika leuna. Hau da, integrala bidearekiko independentea dela eremu horretan.